Kombinatorische Einsichten mit Hilfe von Tabellenkalkulation

Erich Neuwirth, Wien

Kombinatorik handelt vom Abzählen von Dingen (Zählen ohne wirklich zu zählen). Es gibt eine Grundmenge (von n Dingen). Daraus werden k Dinge ausgewählt. Die Auswahl kann auf verschiedene Arten geschehen: mit Wiederholungen oder ohne Wiederholungen, und mit Berücksichtigung der Reihenfolge oder ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Auswahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge nennt man auch Kombinationen, Auswahlen mit Berücksichtigung der Reihenfolge heißen Variationen.
Die allgemeine Formulierung des Problems läßt in der Grundmenge beliebige Elemente zu. Die Darstellung wird aber einfacher, wenn wir als Grundmenge des Umfangs n die Zahlen $1,2,\ldots n$ wählen. Wir wollen uns um Folgenden mit den grundlegenden Formeln für die Kombinationen beschäftigen.

Kombinationen ohne Wiederholung

Repräsentation durch aufsteigende Folgen.
Beispiel: Jede Auswahl von 4 Zahlen aus 6, bei der Duplikate nicht erlaubt sind, und bei der die Reihenfolge keine Rolle spielt, kann als aufsteigende Folge von 4 Zahlen dargestellt werden. Das letzte Element dieser Folge kann höchstens 6 sein. 1234, 1246, 1346 ... sind Beispiele solcher Folgen.
Diese Folgen können wir danach unterscheiden, ob das letzte Element 6 ist oder nicht. Wenn wir diese beiden Teilmengen von Folgen abzählen, und die beiden Anzahlen addieren, haben wir die Gesamtzahl. Die Zahl der Folgen mit höchstens 5 an letzter Stelle ist genau die Zahl der 4 aus 5-Folgen. Andrerseits ist jede Folge mit 6 an letzter Stelle eine verlängerte 3 aus 5-Folge. Daher ist die Zahl der 4 aus 6-Folgen gleich der Summe der Zahl der 4 aus 5-Folgen und der Zahl der 3 aus 5-Folgen. Dieses Prinzip ist allgemein anwendbar und gilt für beliebige Folgen der Länge mindestens 2. Außerdem ist die Zahl der 1 aus x-Folgen für jedes x gleich diesem x und die Zahl der y aus 1 Folgen gleich 0 für y größer als 2.
Zusammenfassung als Tabelle:

	Plätze					
Objekte	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					
6	6					

Die klassische algebraische Schreibweise dieser Beziehungen ist:

$$f_1(n,1) = n$$

$$f_1(1,k) = 0 \text{ für alle } k > 1$$

$$f_1(n,k) = f_1(n-1,k) + f_1(n-1,k-1) \text{ sonst}$$

Wenn wir jetzt noch eine Spalte mit 0 Plätzen einführen, diese Spalte mit 1 füllen, und die Spalte mit der Nummer 1 ebenfalls durch die rekursive Summenbeziehung definieren, erhalten wir folgende Tabelle:

	Plätze					
Objekte	0	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0	0
2	1					
3	1					
4	1					
5	1					
6	1					

erhalten wir folgende Beziehung:

$$f_1(n,0) = 1$$
$$f_1(1,k) = 0 \text{ für alle } k > 1$$
$$f_1(n,k) = f_1(n-1,k) + f_1(n-1,k-1) \text{ sonst}$$

Üblicherweise wird eine andere Bezeichnung verwendet:

$$f_1(n,k) = \binom{n}{k}$$

Da in dieser Tabelle jede Zahl zweimal in die Zeile darunter "sickert", verdoppelt sich die Zeilensumme von Zeile zu Zeile, daher gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Wir können auch folgende Überlegung anstellen:
In jede 3 aus 6-Folge können wir 3 Elemente „einfügen", die in dieser Folge nicht verwendet wurden, um eine 4 aus 6-Folge zu erhalten.
134 kann erweitert werden zu 1234, 1345 und 1346. Also sollte es 3 mal soviele 4 aus 6-Folgen wie 3 aus 6-Folgen geben. Das stimmte aber nicht, weil 1234 auch durch Einfügen der Zahl 1 in die Folge 234 entstanden sein könnte. Die neu entstandenen Folgen werden mehrfach gezählt. Da jedes Element der neuen Folge das neu eingefügte sein kann, gilt allgemein folgende Rekursion:

$$f_1(n,k) = f_1(n,k-1)\frac{(n-(k-1))}{k}$$

und das führt zur üblichen Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tabellendarstellung dieser Formel:

	Plätze				
Objekte	1	2	3	4	5
1	1				
2	2				
3	3				
4	4				
5	5				

Kombinationen mit Wiederholung:

Reihenfolge spielt keine Rolle, Duplikate erlaubt:
Repräsentiert durch nichtfallende Folgen.

Also kann beispielsweise jede 4 aus 6 Folge eine 4 aus 5 Folge oder eine um die Zahl 6 verlängerte 3 aus 6 Folge sein. Allgemeine Tabellendarstellung:

	Plätze					
Objekte	0	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0	0
2	1					
3	1					
4	1					
5	1					
6	1					

Formeldarstellung:

$$f_2(n,0) = 1$$

$$f_2(1,k) = 1 \text{ für alle } k > 1$$

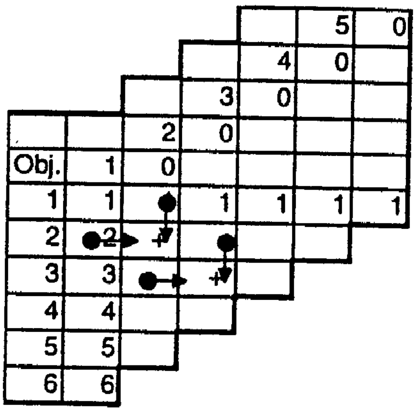
$$f_2(n,k) = f_2(n-1,k) + f_2(n,k-1) \text{ sonst}$$

Das führt zu folgender Beziehung zwischen den beiden Tabellendarstellungen:

	Plätze					
Obj.	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					
6	6					

	Plätze					
Obj.	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	1
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					
6	6					

Eine Scherungsoperation liefert:



Obj.	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	1
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					
6	6					

und daher gilt

$$f_2(n,k) = f_1(n+k-1,k)$$

Zusammenfassung:

Die vorgeführte Form der Ableitung der Formeln und Grundeigenschaften für Kombinationen mit und ohne Wiederholungen will zeigen, daß der Zugang zu den Formeln über die definierenden Rekursionsgleichungen relativ einfach ist, wenn man das Modell der Tabellenkalkulation als konzeptuelles Hilfsmittel einsetzt. Insbesondere läßt sich die Beziehung zwischen der Formeln mit und ohne Wiederholung durch Visualisierung der definierenden Rekursionsgleichungen mit dem Tabellenmodell einfacher veranschaulichen und damit auch leichter verstehen.